77e Année — Août-Septembre 1966 — N° 1-2

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fondée en 1890)

Sujets donnés aux concours des Agrégations et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1966.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

9 avril 67

Mathématiques élémentaires et Mathématiques spéciales.

5748. — *Définitions et notations.* — 1° Les espaces intervenant dans ce problème sont des espaces euclidiens réels R^n $(n = 2, 3, \ldots)$, rapportés, s'il y a lieu, à des repères orthonormés. Dans les espaces R^2 et R^3, les axes de ces repères seront appelés respectivement Ox, Oy et Ox, Oy, Oz. Dans R^2 on associera éventuellement au vecteur de composantes x, y, ou au point de coordonnées x, y, son affixe, le nombre complexe $u = x + iy$.

2° On appellera polytope d'un espace R^n tout ensemble fini, non vide, dont les éléments sont des segments de droites de R^n. Dans certains cas, on associera à chaque segment, tel que AB, d'un polytope l'un ou l'autre des deux vecteurs **AB** ou **BA**; l'ensemble des vecteurs ainsi obtenu définira alors le polytope.

Si l'on considère dans R^n un ensemble fini de points, soit (E), et l'ensemble (Σ) des segments joignant ces points deux à deux, tout sous-ensemble non vide de (Σ) est un polytope défini à partir de (E); les extrémités des segments qui le constituent sont les sommets du polytope. L'ensemble (Σ) lui-même est l'un de ces polytopes, que l'on appellera le polytope complet de (E).

A tout polygone (Π) ayant pour sommets successifs $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}, A_p$, on peut associer le polytope dont les éléments sont les segments $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{p-1}A_p, A_pA_1$ (côtés du polygone), ou bien les vecteurs $\mathbf{A_1A_2}, \ldots, \mathbf{A_{p-1}A_p}, \mathbf{A_pA_1}$; ce polytope et le polygone (Π) seront, pour abréger, désignés par le même terme (triangle, quadrilatère, pentagone, ...) complété, s'il y a lieu, par l'énumération des sommets successifs : polygone $(A_1A_2 \ldots A_pA_1)$, par exemple.

3° Un polytope de R^n, tel que la somme des carrés des longueurs des projections orthogonales de ses éléments sur une droite quelconque de R^n soit indépendante de cette droite, sera appelé un polytope du type P_n.

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés de certains polytopes du type P_n.

4° Les projections dont il sera question dans l'énoncé sont des projections orthogonales (le qualificatif « orthogonal » sera souvent omis dans le texte).

[On rappelle que la projection orthogonale d'un point m de l'espace R^n sur l'un de ses sous-espaces R' de dimension k (inférieure à n) est le point unique m' de R' tel que $\mathbf{mm'}$ soit orthogonal à tous les vecteurs de R'.]

I. — Les polytopes étudiés dans cette partie I sont des polytopes de R^2 (questions 1°, 2°, 3°, 4°) et de R^3 (questions 5°, 6°).

1° Un polytope plan étant défini par p vecteurs dont les affixes sont $u_1, u_2, \ldots, u_p$, montrer que la relation

$$\sum_{k=1}^{p} u_k^2 = 0$$

caractérise un polytope du type P_2.

Montrer que les polygones plans de p sommets $(A_1A_2 \dots A_pA_1)$ du type P_2 peuvent être caractérisés par la double relation

$$\sum_{k=1}^{p} u_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{p} u_k^2 = 0,$$

en désignant par $u_1, u_2, \dots u_p$ les affixes des vecteurs $\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_2A_3}, \dots, \mathbf{A_pA_1}$.

2° Montrer que tout polygone régulier de R^2 est du type P_2, ainsi que le polytope complet défini à partir de l'ensemble des sommets d'un tel polygone régulier.

3° Quels sont les triangles qui, dans leur plan, sont du type P_2?

4° On considère dans un plan quatre points A, B, C et D.

a) A quelles conditions les deux segments AB et CD forment-ils un polytope du type P_2?

b) Quels sont les quadrilatères (ABCDA) qui sont du type P_2 en même temps que le polytope complet formé à partir des quatre points A, B, C et D?

c) On considère tous les quadrilatères (ABCDA) du type P_2 dont deux sommets opposés A et C sont fixés. Le repère est choisi de façon que les affixes des points A et C soient $+1$ et -1. Former la relation caractérisant les affixes u et u' des deux autres sommets B et D. Déterminer, lorsque le point B décrit la droite AC, le lieu du point D, ainsi que le lieu du milieu du segment BD et l'enveloppe de la médiatrice de ce segment.

5° Montrer que, si un polytope de R^3 est du type P_3, sa projection orthogonale sur un plan quelconque est un polytope qui, dans son plan, est du type P_2.

6° Caractériser les quadrilatères (ABCDA) de R^3 qui sont du type P_3 et en donner une construction.

Soit (X) un tel quadrilatère, ayant pour sommets consécutifs A, B, C et D; on considère les huit vecteurs, deux à deux opposés, ayant même origine O, définis par

$$\mathbf{OA'} = -\mathbf{OA''} = \mathbf{AB}, \qquad \mathbf{OB'} = -\mathbf{OB''} = \mathbf{BC},$$
$$\mathbf{OC'} = -\mathbf{OC''} = \mathbf{CD}, \qquad \mathbf{OD'} = -\mathbf{OD''} = \mathbf{DA};$$

étudier la figure formée par les huit points A′, A″, B′, ..., D″.

Définir les symétries du quadrilatère (X).

(*Il n'est pas indispensable d'avoir traité complètement la partie I pour aborder l'étude des parties suivantes.*)

II. — 1° On considère dans R^3 trois vecteurs $\mathbf{V}_k (k = 1, 2, 3)$ de même longueur et deux à deux orthogonaux; soit

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

la matrice de leurs composantes dans le repère $Oxyz$ ($\mathbf{V}_k$ est le k^e vecteur-colonne). On désigne par $\boldsymbol{v}_k$ la projection de $\mathbf{V}_k$ sur le plan Oxy et par u_k l'affixe de $\boldsymbol{v}_k (u_k = a_k + ib_k)$.

Montrer que

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0.$$

Montrer que, réciproquement, tout système de trois vecteurs du plan Oxy dont la somme des carrés des affixes est nulle est (de deux manières) la projection d'un système de trois vecteurs de même longueur et deux à deux orthogonaux.

2° On appellera matrice $(\Omega_{p,n})$ une matrice réelle non nulle, à p lignes et n colonnes $(1 \leqslant p < n)$, telle que, si p est supérieur à 1, la somme des carrés des éléments de chaque ligne soit la même pour les diverses lignes, et que les sommes des produits des éléments de même rang de deux lignes distinctes quelconques soient nulles (vecteurs-lignes deux à deux orthogonaux). [Si $p = 1$, la matrice est une matrice-ligne quelconque non nulle].

Montrer que toute matrice $(\Omega_{p,n})$ peut être complétée par $(n - p)$ lignes de façon à former une matrice carrée d'ordre n proportionnelle à une matrice orthogonale (c'est-à-dire une matrice égale au produit d'une matrice orthogonale par un scalaire non nul).

Dans le cas $p = n - 1$, on dira que les n vecteurs-colonnes $\boldsymbol{v}_k$ d'une matrice $(\Omega_{n-1,n})$ forment une *étoile* de R^{n-1}. (Les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_k$ de la question II, 1° forment une étoile de R^2.)

3° Lorsque la somme des vecteurs d'une étoile est nulle, l'étoile est dite *régulière*. A toute étoile régulière, formée par des vecteurs $\boldsymbol{v}_k$, on associera sa représentation par l'ensemble des vecteurs $\mathbf{IA}_k = \boldsymbol{v}_k$, de même origine I arbitrairement choisie.

a) Soit

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

la matrice d'une étoile régulière de R^2. Quelle est la figure associée formée par les points A_1, A_2 et A_3 et par le point I? Par quelle ligne faut-il compléter la matrice précédente pour obtenir une matrice proportionnelle à une matrice orthogonale?

b) Exprimer que la matrice

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

définit une étoile régulière de R^3 par des conditions *caractéristiques* ne portant que sur les *vecteurs-colonnes.*

On considère les vecteurs $\mathbf{IA}_1$, $\mathbf{IA}_2$, $\mathbf{IA}_3$ et $\mathbf{IA}_4$ associés à une telle étoile; quelle est la figure formée par les points A_1, A_2, A_3 et A_4 et par le point I?

c) Plus généralement, exprimer qu'une matrice $(\Omega_{n-1,\,n})$ définit une étoile régulière de R^{n-1} par des conditions *caractéristiques* ne portant que sur les *vecteurs-colonnes.*

Comparer les distances mutuelles des points A_k $(k = 1, 2, ..., n)$ associés à une telle étoile.

La figure formée par ces n points A_k sera appelée un *simplexe régulier* ayant pour sommets les points A_k.

4° Dans R^3 rapporté au repère $Oxyz$ on considère quatre points du plan Oxy définis par leurs affixes u_k $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ces quatre points soient les projections sur le plan Oxy des sommets d'un tétraèdre régulier est exprimée par la relation

$$(1) \qquad \Sigma(u_k - u_l)^2 = 0$$

(k et l parcourant $\{1, 2, 3, 4\}$), ou par la relation équivalente

$$(2) \qquad 4\sum_{k=1}^{4} u_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{4} u_k\right)^2 = 0.$$

5° On considère dans R^4 les cinq sommets A_k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ d'un simplexe régulier. Montrer que les affixes des projections de ces cinq points sur un plan (sous-espace de dimension 2) de R^4 sont liées par une relation analogue à la relation (1) ou à la relation (2). Cette propriété admet-elle une réciproque?

On considère, dans un plan, cinq points A, B, C, D et E tels que les deux pentagones (ABCDEA) et (ACEBDA) soient, l'un et l'autre, dans ce plan, du type P_2. Montrer que les cinq points sont les projections, sur ce plan, d'un simplexe régulier d'un espace R^4.

III. — L'espace intervenant dans la partie III est l'espace R^3.

1° On caractérise chaque direction de droite par un vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$. Étant donné un polytope, si l'on fait correspondre à $\boldsymbol{u}$ la somme S des carrés des longueurs des projections de ses éléments sur l'une quelconque des droites parallèles à $\boldsymbol{u}$, on définit une forme quadratique de $\boldsymbol{u}$. Deux polytopes seront dits *équivalents* si leurs sommes S s'expriment par la même forme quadratique.

Soit un polytope complet de p sommets, notés A_k $(k = 1, 2, ..., p)$ et soit G le centre des moyennes distances des points $A_k \left(\sum_{k=1}^{p} \mathbf{GA}_k = 0\right)$. Montrer qu'il existe, parmi les homothétiques du polytope formé par les p segments $GA_1, GA_2, ..., GA_p$, un polytope équivalent au polytope complet donné.

2° On donne dans R^3 quatre vecteurs fixes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$, auxquels on pourra associer les matrices-colonnes a, b, c et d de leurs composantes, la matrice M formée par ces colonnes, et la matrice transposée de M.

On considère la transformation (H) qui au vecteur $\mathbf{V}$ fait correspondre le vecteur

$$H(\mathbf{V}) = (\mathbf{V}.\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + (\mathbf{V}.\boldsymbol{b})\boldsymbol{b} + (\mathbf{V}.\boldsymbol{c})\boldsymbol{c} + (\mathbf{V}.\boldsymbol{d})\boldsymbol{d}$$

et on lui associe la forme quadratique $\mathbf{V}.H(\mathbf{V})$.

Interpréter, pour le polytope formé par $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$, la valeur de cette forme quadratique lorsque $\mathbf{V}$ est unitaire.

La transformation (H) est-elle bijective?

Dans quel cas est-elle une homothétie?

3° Comment les résultats établis dans les parties II et III permettent-ils de déterminer les quadrilatères gauches (X) du type P_3?

Montrer que tout quadrilatère plan du type P_2 est la projection d'un tel quadrilatère gauche (X).

4° *a*) Montrer que, parmi les polytopes complets de quatre sommets (en abrégé : tétraèdres), le tétraèdre régulier est caractérisé par le fait d'être du type P_3.

b) Montrer que la somme des carrés des aires des projections des faces d'un tétraèdre régulier sur un plan est indépendante de ce plan et que cette nouvelle propriété est, également, caractéristique.

5° On reprend le cas d'un polytope quelconque de R^3.

a) Définir les directions de droites pour lesquelles la somme S (voir III, 1°) atteint un extremum.

Caractériser les polytopes pour lesquels un extremum de S est nul. (On écartera ce cas dans les questions suivantes.)

b) Montrer que tout polytope est équivalent à un polytope de trois vecteurs. Montrer que tout polytope est équivalent à un polytope de quatre vecteurs dont la somme est nulle.

6° Étudier, pour un polytope quelconque de R^3, les directions de droites pour lesquelles la somme S a une valeur donnée.

Montrer qu'il existe au moins un plan tel que la somme S soit la même pour toutes les directions de droites de ce plan. Quelle propriété possède la projection orthogonale du polytope sur un tel plan?

Montrer que tout système de trois vecteurs non colinéaires peut, au moins d'une façon, être projeté sur un plan suivant une étoile.

IV. — Étant donné un polytope de R^n, on dira qu'il possède la propriété P_n^k si la somme des carrés des longueurs des projections orthogonales de ses éléments sur un sous-espace de dimension k de R^n $(k < n)$ est la même pour tous les sous-espaces de dimension k. (Les polytopes du type P_n qui viennent d'être étudiés sont les polytopes possédant la propriété P_n^1.)

1° Comparer les propriétés P_n^1 et P_n^{n-1}. Cas de $n = 3$?

Comparer les propriétés P_n^1 et P_n^k.

2° Étudier les extensions des propriétés qui ont fait l'objet des questions III, 4°, *a* et III, 4°, *b* à un simplexe régulier de $n + 1$ sommets de R^n.